ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS 1978

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

NOTA : Respecter la numérotation

I - On considère l'ensemble E des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, à coefficients complexes, muni de l'addition et de la multiplication matricielles, ainsi que de la multiplication par un nombre complexe.

I.1 - Montrer brièvement, mais avec précision, que E possède une structure :

I.1.1 - d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; préciser : opérations, dimension, une base ;

I.1.2 - d'anneau ; préciser : opérations et particularités. Conclure.

I.2 - Calculer le déterminant de M(a,b,c), noté dét M. Factoriser dét M. A, B et C, étant les images, dans le plan complexe, de a, b et c, étudier le triangle ABC quand dét M est nul.

Si a, b et c sont réels, non tous trois égaux, donner la condition pour que M(a,b,c) soit régulière.

I.3 - On étudie le sous-ensemble, E_1 de E, formé des matrices M(a,b,c) dont le carré est égal à M(1,0,0) = I.

I.3.1 - Montrer que E_1 est un groupe multiplicatif. Trouver tous les éléments de E_1.

I.3.2 - Trouver le sous-groupe, E_1' de E_1, à éléments réels, de cardinal maximum. Donner la table de multiplication de E_1'.

Dans un espace affine euclidien réel de dimension trois, interpréter géométriquement les transformations associées aux éléments de E_1'. Donner avec précision tous les éléments particuliers de ces transformations.

II - On considère le sous-ensemble, E_2 de E, constitué par les matrices de la forme xA + yB, où x et y sont réels, A = K - I, B = K^2 - I, K = M(0,1,0), I = M(1,0,0).

II.1 - a) Calculer K^n, quand n appartient à N ;

b) calculer $(A + B)^n$, quand n appartient à N.

II.2 - Trouver les valeurs propres de la matrice xA + yB ; cette matrice est-elle diagonalisable ?

II.3 - Montrer que E_2, muni de l'addition et de la multiplication matricielles est un corps. Préciser l'élément unité e et la matrice x'A + y'B inverse de xA + yB au sens de e.

II.4 - Le corps E_2 est-il isomorphe à $\mathbb{C}$?

III - Question préliminaire - A toute matrice carrée A, à éléments dans un corps commutatif L, on associe l'espace vectoriel [A] sur L, engendré par la suite de matrices $I, A, A^2, \ldots, A^n, \ldots$.

Montrer que cet espace est de dimension finie ; soit dim [A] cette dimension.

Montrer que tout polynôme en A peut être réduit, de manière unique, en un polynôme de degré strictement inférieur à dim[A]. En particulier, $A^{\dim[A]}$ est un polynôme q(A) de degré inférieur à dim [A].

.../...

On définit alors le polynôme m_A en l'indéterminée t par :

$$m_A(t) = t^{\dim[A]} - q(t),$$

qu'on appelle polynôme minimal de A.

Montrer que tout polynôme P(t) tel que P(A) = 0 est divisible par $m_A(t)$.

On considère le sous-ensemble E_3 de E formé par les matrices M(a,b,b) à cœfficients complexes. On désigne M(a,b,b) par C(a,b).

III.1 - Etudier très rapidement, mais avec précision, les structures de E_3.

Caractériser les éléments C(a,b) inversibles pour la multiplication matricielle ; préciser C(a',b'), inverse de C(a,b), quand elle existe ; donner les diviseurs de zéro.

III.2 - Trouver, pour (a,b) ≠ (0,0) :

a) le polynôme minimal de C(a,b) ;

b) le polynôme caractéristique de C(a,b) ;

c) les valeurs propres de C(a,b).

La matrice C(a,b) est-elle diagonalisable ?

III.3 - Soit C = C(0,1) et I = M(1,0,0).

a) Trouver le polynôme minimal de C et l'inverse C^{-1} de C pour la multiplication matricielle.

b) Trouver toutes les matrices diagonales d'ordre trois ayant le même polynôme minimal que C.

III.4 - n ∈ $\mathbb{N}^*$; on veut calculer C^n puis $[C(a,b)]^n$, noté $C^n(a,b)$.

a) On pose $C^n = p_n C + q_n I$; trouver une relation de récurrence entre p_{n+1}, p_n et p_{n-1}, puis une relation entre q_{n+1} et p_n. Exprimer p_n et q_n en fonction de n, puis C^n en fonction de C, I et n.

b) Exprimer $C^n(a,b)$ en fonction de C, I, n et des valeurs propres de C(a,b).

IV - Dans cette partie, on se place dans un repère affine euclidien réel de dimension trois, Oxyz.

IV.1 - On considère la surface (S) d'équation :

$${}^tX\,C(a,b)\,X = 0, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad {}^tX = (x,y,z), \quad a \neq b, \quad a \neq -2b.$$

Trouver la nature de cette surface et préciser les éléments particuliers qui lui sont attachés.

Donner une équation de (S) ne contenant que des termes carrés.

IV.2 - On considère le point M(x,y,z), le point A($x_1 = z$; $y_1 = x$; $z_1 = y$), le vecteur libre $\vec{V_1}$ ($X_1 = x$; $Y_1 = y$; $Z_1 = z$), le vecteur libre $\vec{V_2}$ ($X_2 = y$; $Y_2 = z$; $Z_2 = x$), le vecteur glissant $\vec{\Gamma_1}$ équipollent à $\vec{V_1}$ et dont le support passe par O, le vecteur glissant $\vec{\Gamma_2}$ équipollent à $\vec{V_2}$ et dont le support passe par A.

Trouver l'équation de la surface (Σ) décrite par M pour que le comoment des glisseurs $\vec{\Gamma_1}$ et $\vec{\Gamma_2}$ soit égal à a^3, a ∈ $\mathbb{R}^*$.

Préciser toutes les particularités de cette surface à l'aide d'un changement de repère approprié.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail